4/3/2015

Φυλλάδιο #2

Άσκηση 4

Έστω $A \in K^{n \times n}$ το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I_n) = O_K$, αν και μόνο αν υπάρχει $K^{n \times 1}$ με $w \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$ ώστε $Aw = \lambda w$.

Έστω λ ιδιοτιμή του AB. Θα δείξουμε ότι λ ιδιοτιμή του BA.

Δύο περιπτώσεις

1η περίπτωση: $\lambda = O_K$, τότε ο AB δεν αντιστρέφεται $\Rightarrow \det(AB) = O_K \Rightarrow \det(BA) = O_K$ $\Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του BA.

2η περίπτωση: $\lambda \neq O_K$. Άρα υπάρχει $\mathbb{O}_{n\times 1} \neq w \in K^{n\times 1}$ ώστε $ABw = \lambda w \Rightarrow$
$BABw = B(\lambda w) \Rightarrow BABw = \lambda(Bw) \Rightarrow BA(Bw) = \lambda(Bw)$ (*). Αφού $ABw = \lambda w \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$ γιατί $\lambda \neq O_K$ και $w \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$, έπεται $Bw \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$. Σαν συνέπεια, η (*) μας λέει λ ιδιοτιμή του BA.

[$\lambda = O_K \Leftrightarrow \det C = O_K$, ιδιοτιμή του $C \Leftrightarrow$ ο C δεν αντιστρέφεται

Άσκηση 1

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = \ldots = -(x-2)^2 \cdot (x-4)$$

Άρα $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$

α) Υπολογίζουμε τον ιδιόχωρο $V_A(2)$

$$(A-2I_2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - z = 0 \Leftrightarrow z = x$$

$$\text{Άρα } V_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ γρ. ανεξ. άρα βάση του $V_A(2)$. Αφού $\dim V_A(2) = 2$ απ' την θεωρία είναι διαγωνίσιμος

(32) β) Από την θεωρία

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&-1\end{bmatrix} \text{ και } PAP^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix} \Rightarrow A=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}P^{-1}$$

γ) και από την θεωρία

$$A^k=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}^k P^{-1} \Rightarrow A^k=P\begin{bmatrix}2^k&0&0\\0&2^k&0\\0&0&4^k\end{bmatrix}P^{-1}$$

Υπολογισμός P^{-1} όπως στην γραμμική 1 και βλέπουμε

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Έστω $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ $\phi(x)\in \mathbb{F}[x]$

Ισχυρισμός 1. $V_A(\lambda)\subseteq V_{\phi(A)}\cdot\phi(\lambda)$

Παράδειγμα: Έστω $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\phi(x)=x^2$, $x=0$ ιδιοτιμή του A. Ο ισχυρισμός

λέει ότι $V_A(0)\subseteq V$ $(0^2=0 \quad \phi(A)=A^2=0)$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\phi(A)=a_0+a_1x+\dots+a_dx^d$ με $a_i\in\mathbb{F}$. Για $0\le i\le d$, ορίζουμε $h_i(x)\in\mathbb{F}$

με $h_0(x)=a_0,\ \dots,\ h_i(x)=a_ix^i$. Τότε $\phi(x)=h_0(x)+h_1(x)+\dots+h_j(x)$

(1) $\phi(A)=h_0(A)+h_1(A)+\dots+h_j(x)$, (2) $\phi(\lambda)=h_0(\lambda)+h_1(\lambda)+\dots+h_j(\lambda)$

Έστω $w\in V_A(\lambda)$: δηλαδή $w\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ και $Aw=\lambda w$ (3) Θα δείξουμε

$w\in V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$, δηλ. ότι $\phi(A)w=\phi(\lambda)w$ (4) χρησιμοποιώντας τις (1) και (2)

αρκεί ν.δ.ο $(h_i(A))W=(h_i(\lambda))W$ για κάθε $i=0,1,2,\dots,n$.

~~[illegible]~~

Για $i=0$ $h_0(A)=a_0I_n$, $h_0(\lambda)=a_0$ και $(h_0(A))W=a_0I_nW=a_0W=(h_0(\lambda))W$

Για $i=1$ $h_1(A)=a_1A_1$, $h_1(\lambda)=a_1\lambda$ και $(h_1(A))W=a_1AW\overset{(3)}{=}a_1\lambda w$

Για $i=2$ $h_2(A)=a_2A^2$, $h_2(\lambda)=a_2\lambda^2$ και $(h_2(A))W=a_2A^2W=a_2A(AW)=$

$a_2A(\lambda W)=a_2\lambda(AW)=a_2\lambda^2W=(h_2(\lambda))W$

Συνεχίζοντας, έπεται ότι $(h_i(A))W=(h_i(\lambda))W$ ...

Άρα δείξαμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός 1

Ισχυρισμός 2: λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \varphi(\lambda)$ ιδιοτιμή του $\varphi(A)$.

Απόδειξη. Αφού λ ιδιοτιμή του A, υπάρχει $W \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ με $W \neq \mathbb{O}_{n\times 1}$ ώστε $AW = \lambda W$. Η (4) δίνει $(\varphi(A))W = (\varphi(\lambda))W$. άρα $\varphi(\lambda)$ ιδιοτιμή του $\varphi(A)$ και δείξαμε τον ισχυρισμό 2

Ισχυρισμός 3. Θέτουμε $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $\lambda = 0$ και $\varphi(x) = x^2$. Το λ ιδιοτιμή του A και $V_A(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ενώ $\varphi(A) = A^2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$ $\varphi(\lambda) = 0^2 = 0$

και $V_{\varphi(A)}(0) = \mathbb{R}^2$. Άρα $V_A(\lambda) \neq V_{\varphi(A)}\varphi(\lambda)$ στο παράδειγμα

Ισχυρισμός 4: Έστω A διαγωνίσιμος. Τότε $\varphi(A)$ διαγωνίσιμος

Απόδ. A διαγων $\Rightarrow$ υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιανύσματα του $A \overset{\text{ισχ. 1}}{\Rightarrow}$ καθένα από αυτά είναι ιδιοδιανύσματα του $\varphi(A)$ άρα υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ από ιδιοδιαν. του $\varphi(A) \Rightarrow \varphi(A)$ διαγωνίσιμος

Ασκηση 5

Απόδειξη: Έστω $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ η κανονική βάση του $\mathbb{K}^{n\times1}$. Από υπόθεση, το e_i για $i=1,\dots,n$

$Ae_i = e_i\lambda_i$ (*) για ↳ είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Άρα υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ώστε

↳ $i=1,2,\dots,n$. Έστω $i \neq j$ φανερά $e_i+e_j \neq \mathbb{O}_{n\times1}$. Άρα από υπόθεση e_i+e_j ιδιοδιάνυσμα του A. Συνεπώς υπάρχει $\mu \in \mathbb{K}$ με $A(e_i+e_j) = \mu(e_i+e_j) = \mu e_i + \mu j$. Αλλά από (*) $A(e_i+e_j) = Ae_i + Ae_j = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Επομένως $\mu e_i + \mu e_j = \lambda e_i + \lambda_j e_j \Rightarrow (\mu-\lambda_i)e_i + (\mu-\lambda_j)e_j = \mathbb{O}_{n\times1}$ $\Rightarrow \mu = \lambda_i = \lambda_j$. Σαν συμπέρασμα $\lambda_i = \mu$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$ και άρα $Ae_i = \mu e_i$. Έστω τώρα $X \in \mathbb{K}^{n\times1}$. Υπάρχουν (μοναδικά) $a_i \in \mathbb{K}$ ώστε $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ (αφού e_i βάση). Επομένως, $AX = A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(Ae_i) \overset{**}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i(\mu e_i) = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Άρα $(A-\mu I_n)X = \mathbb{O}_{n\times1}$ για κάθε $X \in \mathbb{K}^{n\times1}$. Σαν συνέπεια $A - \mu I_n = \mathbb{O}_{n\times n} \Rightarrow A = \mu I_n$

Ασκηση 2

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -x & 2 \\ 1 & -x \end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^{O} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -x & 3 \\ 1 & -x \end{matrix} \end{vmatrix} = (\text{μετά από πράξεις})\ (x^2-2)(x^2-3)$$

Επομένως ιδιοτιμές	πολ/τητα
$\lambda_1 = \sqrt{2}$	1
$\lambda_2 = -\sqrt{2}$	1
$\lambda_3 = \sqrt{3}$	1
$\lambda_4 = -\sqrt{3}$	1

Δηλαδή $\chi_A(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων επομένως απ' την θεωρία (Πόρισμα 7.5B1) ο A είναι διαγωνίσιμος

*Ορίζουμε πολ/μου βαθμού 4 της μορφής $x^4 + ax^2+b$. Λύνουμε την εξίσωση $x^4+ax^2+b=0$. Θέτοντας $x^2=y$